МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
И.о.заведующего кафедрой
уравнений в частных производных
и теории вероятностей

А.С. Рябенко

26.03.2025

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.В.ДВ.02.01 Эллиптические уравнения с параметром

1. Код и наименование направления подготовки: 01.03.01 Математика

2. Профиль подготовки: Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

3. Квалификация выпускника: Бакалавр

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета

6. Составители программы: Рябенко Александр Сергеевич, кандидат физико-математических наук, доцент

7. Рекомендована: Научно-методическим советом математического факультета 18.03.2025 Протокол № 0500-03

8. Учебный год: 2028/ 2029 Семестр: 7.

9. Цели и задачи учебной дисциплины

Цели изучения дисциплины:

- ознакомление учащихся с современными методами исследования дифференциальных уравнений с частными производными;
- выработка навыков решений стандартных краевых и начально-краевых задач для уравнений с частными производными;
- дать качественные математические и естественнонаучные знания, востребованные обществом;
- дать современные теоретические знания в области уравнений с частными производными и практические навыки в решении и исследовании дифференциальных уравнений с частными производными;
- сформировать социально-личностные качества выпускников: целеустремленность, организованность, трудолюбие, коммуникабельность, умение работать в коллективе, ответственность за конечный результат своей профессиональной деятельности, способности самостоятельно приобретать и применять новые знания и умения.

Задачи учебной дисциплины:

- развитие у учащихся навыков использования методов математического анализа, асимптотического анализа, функционального анализа, операционного исчисления и теории функций комплексного переменного при исследовании уравнений с частными производными;
- выработать навыки решения краевых задач для эллиптических уравнений с параметром;
- дать современные теоретические знания в области краевых задач для уравнений эллиптического типа с параметром и практические навыки в решении и исследовании основных типов дифференциальных уравнений с частными производными.

10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП: Блок 1; часть, формируемая участниками образовательных отношений; дисциплина по выбору.

Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения по предшествующим дисциплинам: «Алгебра», «Математический анализ», «Комплексный анализ», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения», «Уравнения с частными производными», «Доп. главы уравнений с частными производными», «Метод Фурье».

Студент должен свободно владеть математическим анализом, теорией рядов, теорией функций комплексной переменной, элементами линейной алгебры, обладать полными знаниями курсов обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, знаниями теории интегралов Лебега, теории банаховых и гильбертовых пространств.

Знание методов изучения решений эллиптических задач с параметрами является базовым при изучении математических моделей различных физических, химических, биологических, социальных процессов. Кроме того, эллиптические уравнения с параметрами являются отдельным современным динамически развивающимся разделом математической науки.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ПК-4	Способность к определению целей и задач	ПК-4.1	Применяет знания отечественного и международного	Знать: как применять знания отечественного и международного опыта в области знаний уравнений в частных производных и

	проводимых исследований, знание отечественного и международного опыта в области знаний уравнений в частных производных и уравнений математической физики, умение использовать отечественный и международный опыт в данной области задач		опыта в области знаний уравнений в частных производных и уравнений математической физики	уравнений математической физики. Уметь: применять знания отечественного и международного опыта в области знаний уравнений в частных производных и уравнений математической физики. Владеть: методами, позволяющими применять знания отечественного и международного опыта в области знаний уравнений в частных производных и уравнений математической физики.
		ПК-4.2	Анализирует и внедряет отечественный и международный опыт в данной области задач	Знать: как анализировать и внедрять отечественный и международный опыт в данной области задач. Уметь: применять методы анализа и внедрения отечественного и международного опыта в данной области задач. Владеть: методами, позволяющими анализировать и внедрять отечественный и международный опыт в данной области задач.
		ПК-4.3	Формирует иерархию основных и второстепенных целей и задач в исследованиях, проводимых в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики.	Знать: как формировать иерархию основных и второстепенных целей и задач в исследованиях, проводимых в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики. Уметь: формировать иерархию основных и второстепенных целей и задач в исследованиях, проводимых в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики. Владеть: методами, позволяющими формировать иерархию основных и второстепенных целей и задач в исследованиях, проводимых в области уравнений в частных производных и уравнений математической физики.

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час.— 2 / 72.

Форма промежуточной аттестации: Экзамен – 7 семестр

13. Трудоемкость по видам учебной работы

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			7 семестр
Контактная работа		28	28
в том числе:	лекции	14	14
	практические	14	14
	лабораторные		
	курсовая работа		
	контрольные работы	1	1
Самостоятельная работа		8	8

Промежуточная аттестация - экзамен	36	36
Итого:	72	72

13.1. Содержание дисциплины

п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК *
		1. Лекции	
1.1	Преобразование Фурье и преобразование Лапласа	Преобразование Фурье и его свойства. Преобразование Лапласа и его свойства.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11060
1.2	Метод продолжения по параметру, теорема вложения	Пространства L_2 и W_p^k. Метод продолжения по параметру. Теоремы вложения для Соболевских пространств	
1.3	Элементы теории функций комплексного переменного.	Аналитичность функций комплексного переменного	
		2. Практические занятия	
2.1	Изучение краевой задачи с параметром, порожденной первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности на отрезке	Постановка задачи Априорные оценки Доказательство существования решения, построение вспомогательных оценок решения Доказательство аналитичности решения по параметру γ	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11060 -
2.2	Изучение краевой задачи с параметром, порожденной первой начально-краевой задачей для волнового уравнения	Постановка задачи Априорные оценки Доказательство существования решения, построение вспомогательных оценок решения Доказательство аналитичности решения по параметру γ	
2.3	Изучение краевой задачи с параметрами, порожденной первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности в полосе	Постановка задачи Априорные оценки Доказательство существования решения, построение вспомогательных оценок решения Доказательство аналитичности решения по параметру γ Контрольная работа	
		3. Лабораторные занятия	
3.1			
3.2			

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
1	Преобразование Фурье и преобразование Лапласа	6			2	8
2	Метод продолжения по параметру, теорема вложения	6			2	8
3	Элементы теории функций комплексного	2			4	6

	переменного.					
4	Изучение краевой задачи с параметром, порожденной первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности на отрезке		4			4
5	Изучение краевой задачи с параметром, порожденной первой начально-краевой задачей для волнового уравнения		4			4
6	Изучение краевой задачи с параметрами, порожденной первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности в полосе		6			6
	Итого:	14	14		8	36

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Преподавание дисциплины заключается в чтении лекций и проведении практических занятий. На лекциях рассказывается теоретический материал, на практических занятиях решаются примеры по теоретическому материалу, прочитанному на лекциях.

При изучении курса «Эллиптические уравнения с параметром» обучающимся следует внимательно слушать и конспектировать материал, излагаемый на аудиторных занятиях. Для его понимания и качественного усвоения обучающимся рекомендуется следующая последовательность действий.

1. После каждой лекции студентам рекомендуется подробно разобрать прочитанный теоретический материал, выучить все определения и формулировки теорем, разобрать примеры, решенные на лекции. Перед следующей лекцией обязательно повторить материал предыдущей лекции.
2. Перед практическим занятием обязательно повторить лекционный материал. После практического занятия еще раз разобрать решенные на этом занятии примеры, после приступить к выполнению домашнего задания. Если при решении примеров, заданных на дом, возникают вопросы, обязательно задать на следующем практическом занятии или в присутствующий час преподавателю.
3. При подготовке к практическим занятиям повторить основные понятия по темам, изучить примеры. Решая задачи, предварительно понять, какой теоретический материал нужно использовать. Наметить план решения, попробовать на его основе решить практические задачи.
4. Выбрать время для работы с литературой по дисциплине в библиотеке.

Вопросы лекционных и практических занятий обсуждаются на занятиях в виде устного опроса – индивидуального и фронтального. В ходе устного опроса выявляются детали, которые по каким-то причинам оказались недостаточно осмысленными студентами в ходе учебных занятий. Тем самым опрос выполняет важнейшие обучающую, развивающую и корректирующую функции, позволяет студентам учесть недоработки и избежать их при подготовке к промежуточным аттестациям.

Кроме обычного курса в системе «Электронный университет», все необходимые для усвоения курса материалы размещены на кафедральном сайте http//:www.kuchp.ru

Методические указания для обучающихся при самостоятельной работе.

Самостоятельная работа обучающихся направлена на самостоятельное освоение всех тем и вопросов учебной дисциплины, предусмотренных программой. Самостоятельная работа является обязательным видом деятельности для каждого обучающегося, ее объем по учебному курсу определяется учебным планом и составляет 8 часов. При самостоятельной работе обучающийся взаимодействует с рекомендованными материалами при минимальном участии преподавателя.

Самостоятельная работа с учебниками, учебными пособиями, научной, справочной и популярной литературой, материалами периодических изданий и ресурсами сети Internet, статистическими данными является наиболее эффективным методом получения знаний, позволяет значительно активизировать процесс овладения информацией, способствует более глубокому усвоению изучаемого материала, формирует у обучающихся заинтересованное отношение к конкретной проблеме.

Вопросы, которые вызывают у обучающихся затруднения при подготовке, должны быть заранее сформулированы и озвучены во время занятий в аудитории для дополнительного разъяснения преподавателем.

Виды самостоятельной работы: конспектирование учебной и научной литературы; проработка учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе); работа в электронной библиотечной системе; работа с информационными справочными системами, выполнение домашних заданий (практических и теоретических); выполнение контрольных работ; подготовка к практическим занятиям; работа с вопросами для самопроверки, написание рефератов.

Примерные темы рефератов: Преобразование Фурье и преобразование Лапласа; Метод продолжения по параметру; Теоремы вложения; Элементы теории функций комплексного переменного.

Рефераты оцениваются по системе «зачтено» / «не зачтено». Оценка «зачтено» ставится в случае раскрытия предложенной темы, оценка «не зачтено» ставится в случае, если тема не раскрыта.

Все задания, выполняемые студентами самостоятельно, подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Сабитов К.Б. Уравнения математической физики / К.Б. Сабитов . – М.: Физматлит, 2013. – 352 с. // «Университетская библиотека online»: электронно-библиотечная система. – URL: http://biblioclub.ru

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Карчевский М.М. Лекции по уравнениям математической физики / М.М. Карчевский. – СПб: Издательство «Лань», 2016. – 164 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/
2	Глушко А. В. Уравнения математической физики / А. В. Глушко, А. Д. Баев, А. С. Рябенко. – В.: ИПЦВГУ, 2011. – 520 с. – *URL:http://www.kuchp.ru*
3	Бибиков Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. – СПб:

	Издательство «Лань», 2021. – 304 с. – // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/URL: https://e.lanbook.com/
4	Трухан А. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и методы их решения. Ряды. Элементы вариационного исчисления: учебное пособие для вузов / А. А. Трухан, Т.В .Огородникова. – СПб: Издательство «Лань», 2020. – 268 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/
5	Рябенко А. С. Дифференциальные уравнения с параметрами / А. С. Рябенко. – Воронеж: ВГПУ, 2015. – 54 с. – URL:http://www.kuchp.ru
6	Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного / И. И. Привалов. – СПб: Издательство «Лань», 2021. – 432 с. // Электронно-библиотечная система «Лань».– URL: https://e.lanbook.com/
7	Власова Е. А. Элементы функционального анализа / Е. А. Власова, И. К. Марчевский. – СПб: Издательство «Лань», 2021. – 400 с. // Электронно-библиотечная система «Лань».– URL: https://e.lanbook.com/
8	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, Михайлова Т.В., Шабунин М.И. – М: Физматлит, 2016. – 512 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/
9	Люстерник Л. А., Соболев В. И. Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. – СПб: Издательство «Лань», 2021. – 272 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет)*:

№ п/п	Источник
1	http://eqworld.ipmnet.ru – интернет-портал, посвященный уравнениям и методам их решений
2	http://www.lib.vsu.ru - электронный каталог ЗНБ ВГУ
3	http://www.kuchp.ru – электронный сайт кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей, на котором размещены методические издания
4	ЭБС «Университетская библиотека онлайн»
5	ЭБС «Лань»
6	Электронный курс https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11060

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Глушко А. В. Уравнения математической физики : учеб. пособие / А.В. Глушко, А.Д. Баев, А.С. Рябенко; Воронеж. гос. ун-т. – Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2011. – 520 с. – URL:http://www.kuchp.ru
2	Владимиров В.С. Сборник задач по уравнениям математической физики / В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, Михайлова Т.В., Шабунин М.И. – М: Физматлит, 2016. – 512 с. // Электронно-библиотечная система «Лань». – URL: https://e.lanbook.com/
3	Рябенко А.С. Дифференциальные уравнения с параметрами / А.С. Рябенко. – Воронеж: ВГПУ, 2015. – 54 с. – URL:http://www.kuchp.ru

17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение):

Дисциплина может реализовываться с применением дистанционных образовательных технологий, например, на платформе «Электронный университет ВГУ» (https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11060).

Перечень необходимого программного обеспечения: Microsoft Windows Server 2008, Microsoft Windows 10 Enterprise 64 bit, LibreOffice 6 (*Writer (текстовый процессор), Calc (электронные таблицы), Impress (презентации), Draw (векторная графика), Base (база данных), Math (редактор формул)*), Maxima, Total Commander, WinDjView, Foxit Reader, 7-Zip, Mozilla Firefox.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины: Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа, текущего контроля и промежуточной аттестации (394018, г. Воронеж, площадь Университетская, д. 1, пом. I). Специализированная мебель.

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Преобразование Фурье и преобразование Лапласа	ПК-4	ПК-4.1, ПК-4.2, ПК-4.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
2.	Метод продолжения по параметру, теорема вложения	ПК-4	ПК-4.1, ПК-4.2, ПК-4.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
3.	Элементы теории функций комплексного переменного.	ПК-4	ПК-4.1, ПК-4.2, ПК-4.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
4.	Изучение краевой задачи с параметром, порожденной первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности на отрезке	ПК-4	ПК-4.1, ПК-4.2, ПК-4.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
5.	Изучение краевой задачи с параметром, порожденной первой начально-краевой задачей для волнового уравнения	ПК-4	ПК-4.1, ПК-4.2, ПК-4.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
6.	Изучение краевой задачи с параметрами, порожденной первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности в полосе	ПК-4	ПК-4.1, ПК-4.2, ПК-4.3.	Тестовые задания, контрольная работа, перечень вопросов к экзамену
Промежуточная аттестация форма контроля - Экзамен				Перечень вопросов к экзамену

20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1. Текущий контроль успеваемости

Примерный перечень тестовых заданий

1. Пусть задана функция $f(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$. Преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется следующий интеграл

а) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)dx$, б) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi x)dx$, в) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi x)dx$.

2. Начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности называется следующая задача:

$$\text{а) } \begin{cases} \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} - a^2(x)\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad x\in[0;d], \quad t>0, \\ v(0,t)=0, \quad v(d,t)=0, \\ v(x,0)=0. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - a^2(x)\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad x\in[0;d], \quad t>0, \\ v(0,t)=0, \quad v(d,t)=0, \\ v(x,0)=0, \quad \dfrac{\partial v(x,0)}{\partial t}=0. \end{cases}$$

3. Пусть $\gamma\in\mathbb{C}$, $\varphi=\arg\gamma$, $b^2(x)\in C([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x\in[0;d]$ выполнены оценки

$$0<\varepsilon_1\le|b(x)|\le\varepsilon_2,$$

а $u(x,\gamma)$ решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma b^2(x)u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x\in[0;d], \\ u(0,\gamma)=0, \quad u(d,\gamma)=0. \end{cases}$$

Тогда при $\gamma\ne0, |\varphi|\in\left[0;\pi-\varepsilon^0\right]$, где $\varepsilon^0>0$, равномерно по $x\in[0;d]$ выполнена оценка

$$\left|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right| > \frac{\|f(x,\gamma)\|}{\min\left\{1,|\gamma|^{1/2},|\gamma|\right\}}.$$

а) да б) нет.

4. Пусть $\xi\in\mathbb{R}^n$, $\tilde f(\xi)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi}f(x)dx$ – преобразование Фурье функции $f(x)$, тогда функцию $f(x)$ можно восстановить по следующей формуле

а) $f(x)=\dfrac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\tilde f(\xi)d\xi$, б) $f(x)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\tilde f(\xi)d\xi$,

в) $f(x)=\dfrac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\tilde f(\xi)d\xi$.

5. Является ли пространство $W_p^k(\Omega)$ банаховым?

а) да. б) нет.

6. Пусть $\gamma\in\mathbb{C}$, $\varphi=\arg\gamma$, а функция $u(x,\gamma)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma b^2(x)u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x\in[0;d], \\ u(0,\gamma)=0, \quad u(d,\gamma)=0. \end{cases}$$

Тогда при $\gamma\ne0, |\varphi|\in\left[0;\pi-\varepsilon^0\right]$, где $\varepsilon^0>0$, будет выполнена оценка

а) $\left\|\dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2}\right\| + |\gamma|^{1/2}\left\|\dfrac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right\| + |\gamma|\|u(x,\gamma)\| \le c\|f(x,\gamma)\|$, б) $\left\|\frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2}\right\| + |\gamma|\left\|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right\| + |\gamma|^2 \|u(x,\gamma)\| \le c\|f(x,\gamma)\|$.

7. Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$, $F_{x\to\xi}[f(x)] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)dx$ – преобразование Фурье функции $f(x)$, тогда функция $F_{x\to\xi}\left[D^\alpha f(x)\right]$ – преобразование Фурье функции $D^\alpha f(x)$ вычисляется по следующей формуле:

а) $(-i\xi)^\alpha F_{x\to\xi}[f(x)]$, б) $(i\xi)^\alpha F_{x\to\xi}[f(x)]$, в) $(-i)^\alpha \xi F_{x\to\xi}[f(x)]$.

8. Является ли пространство $C^k(\bar{\Omega})$ гильбертовым?

а) да. б) нет.

9. Пусть $u(x,\gamma)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma^2 b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

Тогда будет выполнена оценка

а) $\|u(x,\gamma)\|^2 \le \frac{\pi d^2}{8}\left\|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right\|^2$, б) $\|u(x,\gamma)\|^2 > \frac{\pi d^2}{8}\left\|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right\|^2$.

10. Пусть функция $f(t)$ – оригинал, а γ – комплексное число. Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ называется следующая функция комплексного переменного:

а) $F(\gamma) = \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} f(t)\,dt$, б) $F(\gamma) = \int\limits_0^\infty e^{\gamma t} f(t)\,dt$, в) $F(\gamma) = \int\limits_0^\infty \gamma t f(t)\,dt$.

11. Является ли пространство $C^k(\bar{\Omega})$ банаховым?

а) да. б) нет.

12. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $a^2(x) \in C([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |a(x)| \le \varepsilon_2.$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - a^2(x)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad x \in [0;d], \quad t > 0, \\ v(0,t) = 0, \quad v(d,t) = 0, \\ v(x,0) = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Обозначим через $u(x,\gamma)$ преобразование Лапласа по переменной t решение задачи (*), т. е.

$$u(x,\gamma) = L_{t\to\gamma}[v(x,t)] = \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} v(x,t)dt,$$

а $a^{-2}(x) = b^2(x),\ f(x,\gamma) = \frac{L_{t\to\gamma}[f(x,t)]}{a^2(x)}$.

Если к задаче (*) формально применить преобразование Лапласа, то получим задачу а) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma^2 b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$

13. Преобразование Лапласа является

а) линейным, б) не линейным.

14. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in C([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |b(x)| \le \varepsilon_2 ,$$

а функция $u(x,\gamma)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma^2 b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

Тогда при $|\varphi| \in \left[0; \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon_0\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2} + \varepsilon_0; \pi\right]$, где $0 < \varepsilon_0 \le \dfrac{\pi}{2}$, будет выполнена оценка

а) $\left\| \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} \right\| + |\gamma|^{1/2} \left\| \dfrac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x} \right\| + |\gamma| \|u(x,\gamma)\| \le c \| f(x,\gamma) \|$,

б) $\left\| \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} \right\| + |\gamma| \left\| \dfrac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x} \right\| + |\gamma|^2 \|u(x,\gamma)\| \le c \| f(x,\gamma) \|$.

15. Пусть

$$\left(f(x,\gamma), u(x,\gamma) \right) = \int_0^d f(x,\gamma) \bar{u}(x,\gamma)\, dx ,$$

$$\| f(x,\gamma) \| = \left(\int_0^d | f(x,\gamma)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}, \ \|u(x,\gamma)\| = \left(\int_0^d |u(x,\gamma)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда всегда выполнена следующая оценка:

а) $|(f(x,\gamma), u(x,\gamma))| > \| f(x,\gamma)\| \|u(x,\gamma)\|$,

б) $|(f(x,\gamma), u(x,\gamma))| \le \| f(x,\gamma)\| \|u(x,\gamma)\|$,

в) $|(f(x,\gamma), u(x,\gamma))| \le \| f(x,\gamma)\|^2 \|u(x,\gamma)\|^2$.

16. Пусть $f(t), f'(t), ..., f^{(n)}(t)$ – оригиналы и $F(\gamma) = L_{t\to\gamma}\left[f(t) \right]$ – преобразование Лапласа функции $f(t)$, тогда $L_{t\to\gamma}\left[f^{(n)}(t) \right]$ – преобразование Лапласа функции $f^{(n)}(t)$ равно

а) $\gamma^n F(\gamma) - \gamma^{n-1} f(0) - \gamma^{n-2} f'(0) - ... - \gamma f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$,

б) $\gamma^n F(\gamma) - \gamma^{n-1} f(0)$, в) $\gamma^n F(\gamma) - f^{(n-1)}(0)$.

17. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $b^2(x) \in \tilde{N}([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |b(x)| \le \varepsilon_2 ,$$

а функция $u(x,\gamma)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma^2 b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

Существует ли такая положительная константа ε, что при $|\gamma| \le \varepsilon$ будет выполнена оценка

$$\left\| \frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} \right\| + \left\| \frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x} \right\| + \| u(x,\gamma) \| \le c \| f(x,\gamma) \| ?$$

а) да. б) нет.

18. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in \tilde{N}([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |b(x)| \le \varepsilon_2 ,$$

а $u(x,\gamma)$ решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma^2 b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

Тогда при $|\varphi| \in \left[0; \frac{\pi}{2} - \varepsilon_0\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + \varepsilon_0; \pi\right]$, где $0 < \varepsilon_0 \le \frac{\pi}{2}$, равномерно по $x \in [0;d]$ выполнена оценка

$$|u(x,\gamma)| \le \frac{c \| f(x,\gamma) \|}{\min\left\{ |\gamma|, |\gamma|^2 \right\}} .$$

а) да. б) нет.

19. Пусть $F(\gamma) = \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} f(t)\, dt$ – преобразование Лапласа функции $f(t)$, тогда функцию $f(t)$ можно восстановить по следующей формуле

а) $f(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\gamma t} F(\gamma) d\gamma$, б) $f(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{-\gamma t} F(\gamma) d\gamma$,

в) $f(t) = \int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\gamma t} F(\gamma) d\gamma$.

20. Является ли пространство $L_p(\Omega)$ банаховым?

а) да. б) нет.

21. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in C([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |b(x)| \le \varepsilon_2 ,$$

а $u(x,\gamma)$ решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma^2 b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

Тогда при $|\varphi| \in \left[0; \frac{\pi}{2} - \varepsilon_0\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + \varepsilon_0; \pi\right]$, где $0 < \varepsilon_0 \le \frac{\pi}{2}$, равномерно по $x \in [0;d]$ выполнена оценка

$$\left|\frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x}\right| > \frac{c\|f(x,\gamma)\|}{\min\left\{1,|\gamma|,|\gamma|^2\right\}}.$$

а) да. б) нет.

22. Линейный и непрерывный оператор $A: X \to Y$ называется непрерывно обратимым, если у оператора A существует

а) обратный оператор $A^{-1}: Y \to X$ и он так же является непрерывным $(R(A^{-1}) = Y)$,

б) обратный оператор $A^{-1}: Y \to X$ $(R(A^{-1}) = Y)$,

в) обратный оператор $A^{-1}: Y \to X$ и он является линейным $(R(A^{-1}) = Y)$.

23. Пространством $C^k(\bar{\Omega})$ обозначается множество

а) непрерывных в Ω функций,

б) k раз непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций,

в) k раз дифференцируемых в Ω функций.

24. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in \tilde{N}([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |b(x)| \le \varepsilon_2,$$

функция $f(x,\gamma)$ аналитична по γ во всей комплексной плоскости, а $u(x,\gamma)$ решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma^2 b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

Будет ли функция $u(x,\gamma)$ аналитичной по γ при γ лежащих на вещественной оси?

а) да. б) нет.

25. Пусть $A(\lambda)$ – непрерывная на $[0;1]$ оператор-функции действующая из пространства X в пространство Y, а оператор $A(0)$ непрерывно обратим. Оператор $A(1)$ будет непрерывно обратимым, если существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что при всех $\lambda \in [0;1]$ и при любых $x \in X$ выполнена оценка

а) $\|A(\lambda)x\| \ge \gamma\|x\|$, б) $\|A(\lambda)x\| < \gamma\|x\|$.

26. Является ли пространство $W_2^k(\Omega)$ гильбертовым?

а) да. б) нет.

27. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in C([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |b(x)| \le \varepsilon_2,$$

функция $f(x,\gamma)$ аналитична по γ во всей комплексной плоскости, а $u(x,\gamma)$ решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma^2 b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

Будет ли функция $u(x,\gamma)$ аналитичной по γ при γ лежащих на мнимой оси?

а) да. б) нет.

28. Является ли пространство $L_2(\Omega)$ гильбертовым?

а) да. б) нет.

29. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $a^2(x) \in \tilde{N}([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |a(x)| \le \varepsilon_2 .$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - a^2(x)\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad x \in [0;d], \quad t > 0, \\ v(0,t) = 0, \quad v(d,t) = 0, \\ v(x,0) = 0, \quad \dfrac{\partial v(x,0)}{\partial t} = 0. \end{cases} \qquad (*)$$

Обозначим через $u(x,\gamma)$ преобразование Лапласа по переменной t решение задачи (*), т. е.

$$u(x,\gamma) = L_{t\to\gamma}\left[v(x,t)\right] = \int_0^\infty e^{-\gamma t} v(x,t)dt ,$$

а $a^{-2}(x) = b^2(x),\ f(x,\gamma) = \dfrac{L_{t\to\gamma}\left[f(x,t)\right]}{a^2(x)}$.

Если к задаче (*) формально применить преобразование Лапласа, то получим задачу

а) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma b^2(x)u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma^2 b^2(x)u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$

30. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in \tilde{N}([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |b(x)| \le \varepsilon_2 ,$$

функция $f(x,\gamma)$ аналитична по γ во всей комплексной плоскости, а $u(x,\gamma)$ решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma b^2(x)u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

Будет ли функция $u(x,\gamma)$ аналитичной по γ при γ лежащих на мнимой оси?

а) да. б) нет.

31. Норма функции $u(x)$ в пространстве $L_p(\Omega)$ задается формулой

а) $(\int\limits_\Omega \left|\dfrac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}\right|^p dx)^{1/p}$, б) $\int\limits_\Omega \left|\dfrac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}\right|^p dx$, $\int\limits_\Omega \left|\dfrac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}\right| dx$.

32. Пусть

$$\left(f(x,\gamma), u(x,\gamma) \right) = \int_0^d f(x,\gamma)\bar{u}(x,\gamma)\,dx ,$$

$$\|f(x,\gamma)\| = \left(\int_0^d |f(x,\gamma)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},\ \|u(x,\gamma)\| = \left(\int_0^d |u(x,\gamma)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда всегда при произвольном $\varepsilon_1 > 0$ выполнена следующая оценка:

а) $|(f(x,\gamma),u(x,\gamma))| > \dfrac{\|f(x,\gamma)\|^2}{2\varepsilon_1} + \dfrac{\varepsilon_1\|u(x,\gamma)\|^2}{2}$,

б) $|(f(x,\gamma),u(x,\gamma))| \le \dfrac{\|f(x,\gamma)\|^2\|u(x,\gamma)\|^2}{2\varepsilon_1}$,

в) $|(f(x,\gamma),u(x,\gamma))| \le \dfrac{\|f(x,\gamma)\|^2}{2\varepsilon_1} + \dfrac{\varepsilon_1\|u(x,\gamma)\|^2}{2}$.

33. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in \tilde{N}([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |b(x)| \le \varepsilon_2,$$

функция $f(x,\gamma)$ аналитична по γ во всей комплексной плоскости, а $u(x,\gamma)$ решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma b^2(x)u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

Будет ли функция $u(x,\gamma)$ аналитичной по γ при γ лежащих на вещественной оси?

а) да. б) нет.

34. Норма функции $u(x)$ в пространстве $W_p^k(\Omega)$ задается формулой

а) $(\sum\limits_{|\alpha|\le k}\int\limits_\Omega \left|\dfrac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}\right|^p dx)^{1/p}$, б) $\sum\limits_{|\alpha|\le k}\int\limits_\Omega \left|\dfrac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}\right|^p dx$, в) $(\int\limits_\Omega \left|\dfrac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}\right|^p dx)^{1/k}$.

35. Пусть $f(z) = u(a,b) + iv(a,b)$, где $z = a + ib$, и

1) функции $u(a,b)$ и $v(a,b)$ были дифференцируемы в точке $(a;b)$;

2) для функций $u(a,b)$ и $v(a,b)$ в точке $(a;b)$ выполнялись условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u(a,b)}{\partial a} = \frac{\partial v(a,b)}{\partial b},\ \frac{\partial u(a,b)}{\partial b} = -\frac{\partial v(a,b)}{\partial a}.$$

Тогда функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z = a + ib$ и будут справедливы равенства

а) $f'(z) = \dfrac{\partial u(a,b)}{\partial a} + i\dfrac{\partial v(a,b)}{\partial a}$, б) $f'(z) = \dfrac{\partial v(a,b)}{\partial a} + i\dfrac{\partial u(a,b)}{\partial a}$,

в) $f'(z) = -\dfrac{\partial u(a,b)}{\partial a} + i\dfrac{\partial v(a,b)}{\partial a}$.

36. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in \tilde{N}([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |b(x)| \le \varepsilon_2,$$

а $u(x,\gamma)$ решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma b^2(x)u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

Тогда при $\gamma \neq 0, |\varphi| \in \left[0; \pi - \varepsilon^0\right]$, где $\varepsilon^0 > 0$, равномерно по $x \in [0; d]$ выполнена оценка

$$|u(x,\gamma)| \leq \frac{c\|f(x,\gamma)\|}{\min\left\{|\gamma|^{1/2}, |\gamma|\right\}}.$$

а) да. б) нет.

37. Норма функции $u(x)$ в пространстве $C^k(\bar{\Omega})$ задается формулой

а) $\sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha} \right|$, б) $\sum_{|\alpha| \leq k} \left| \frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha} \right|$, в) $\max_{x \in \bar{\Omega}} \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right|$.

39. Пусть $u(x,\gamma)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0; d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

Тогда будет выполнена оценка

а) $\|u(x,\gamma)\|^2 \leq \frac{\pi d^2}{8} \left\| \frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x} \right\|^2$, б) $\|u(x,\gamma)\|^2 > \frac{\pi d^2}{8} \left\| \frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x} \right\|^2$.

40. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in C([0; d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0; d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \leq |b(x)| \leq \varepsilon_2.$$

Существует ли при $\gamma \neq 0, |\varphi| \in \left[0; \pi - \varepsilon^0\right]$, где $\varepsilon^0 > 0$, решение у задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0; d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

а) да. б) нет

41. Пусть Ω это ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Если функция $u(x)$ принадлежит пространству $W_p^k(\Omega)$ и $k > k_1 + \frac{n}{p}$, то функция $u(x)$ принадлежит пространству $C^{k_1}(\bar{\Omega})$ и будет выполнена оценка

а) $\|u\|_{C^{k_1}(\bar{\Omega})} > \tilde{n}\|u\|_{W_p^k(\Omega)}$, б) $\|u\|_{C^{k_1}(\bar{\Omega})} \leq \tilde{n}\|u\|_{W_p^k(\Omega)}$.

42. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $b^2(x) \in \tilde{N}([0; d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0; d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \leq |b(x)| \leq \varepsilon_2,$$

а функция $u(x,\gamma)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0; d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

Существует ли такая положительная константа ε, что при $|\gamma| \leq \varepsilon$ будет выполнена оценка

$$\left\| \frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} \right\| + \left\| \frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x} \right\| + \|u(x,\gamma)\| \leq c\|f(x,\gamma)\| ?$$

а) да. б) нет.

43. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in C([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |b(x)| \le \varepsilon_2 .$$

Существует ли при малых γ решение у задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma^2 b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

а) да. б) нет.

44. Для того чтобы функция $f(z) = u(a,b) + iv(a,b)$ была дифференцируема в точке $z = a + ib$, необходимо и достаточно, чтобы

а) функции $u(a,b)$ и $v(a,b)$ были дифференцируемы в точке $(a;b)$;

б) для функций $u(a,b)$ и $v(a,b)$ в точке $(a;b)$ выполнялись условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u(a,b)}{\partial a} = \frac{\partial v(a,b)}{\partial b}, \ \frac{\partial u(a,b)}{\partial b} = -\frac{\partial v(a,b)}{\partial a} .$$

в) функции $u(a,b)$ и $v(a,b)$ были дифференцируемы в точке $(a;b)$ и для функций $u(a,b)$ и $v(a,b)$ в точке $(a;b)$ выполнялись условия:

$$\frac{\partial u(a,b)}{\partial a} = \frac{\partial v(a,b)}{\partial b}, \ \frac{\partial u(a,b)}{\partial b} = -\frac{\partial v(a,b)}{\partial a} .$$

45. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in \tilde{N}([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |b(x)| \le \varepsilon_2 .$$

Существует ли при малых γ решение у задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

а) да. б) нет.

46. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in C([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |b(x)| \le \varepsilon_2 ,$$

а $u(x,\gamma)$ решение задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma^2 b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

Тогда при $|\varphi| \in \left[0; \frac{\pi}{2} - \varepsilon_0\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + \varepsilon_0; \pi\right]$, где $0 < \varepsilon_0 \le \frac{\pi}{2}$, равномерно по $x \in [0;d]$ выполнена оценка

$$|u(x,\gamma)| \le \frac{c\|f(x,\gamma)\|}{\min\left\{|\gamma|, |\gamma|^2\right\}} .$$

а) да. б) нет

Примерный перечень задач для контрольной работы

1. Свести первую начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке к краевой задачи с параметром.

2. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in C([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |b(x)| \le \varepsilon_2 ,$$

а функция $u(x,\gamma)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

Доказать, что при $\gamma \ne 0, |\varphi| \in \left[0; \pi - \varepsilon^0\right]$, где $\varepsilon^0 > 0$, будет выполнена оценка

$$\left\| \frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} \right\| + |\gamma|^{1/2} \left\| \frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x} \right\| + |\gamma| \| u(x,\gamma) \| \le c \| f(x,\gamma) \| .$$

3. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in C([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |b(x)| \le \varepsilon_2 ,$$

Доказать, что при $\gamma \ne 0, |\varphi| \in \left[0; \pi - \varepsilon^0\right]$, где $\varepsilon^0 > 0$, у задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0, \end{cases}$$

существует решение.

4. Свести первую начально-краевую задачу для волнового уравнения к краевой задаче с параметром.

5. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in C([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |b(x)| \le \varepsilon_2 ,$$

а функция $u(x,\gamma)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma^2 b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma) = 0, \quad u(d,\gamma) = 0. \end{cases}$$

Доказать, что при $|\varphi| \in \left[0; \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon_0\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2} + \varepsilon_0; \pi\right]$, где $0 < \varepsilon_0 \le \dfrac{\pi}{2}$, будет выполнена оценка

$$\left\| \frac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} \right\| + |\gamma| \left\| \frac{\partial u(x,\gamma)}{\partial x} \right\| + |\gamma|^2 \| u(x,\gamma) \| \le c \| f(x,\gamma) \| .$$

6. Пусть $\gamma \in \mathbb{C}$, $\varphi = \arg\gamma$, $b^2(x) \in C([0;d])$ и существуют такие константы ε_1 и ε_2, что при $x \in [0;d]$ выполнены оценки

$$0 < \varepsilon_1 \le |b(x)| \le \varepsilon_2 ,$$

Доказать, что при $|\varphi| \in \left[0; \dfrac{\pi}{2} - \varepsilon_0\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2} + \varepsilon_0; \pi\right]$, где $0 < \varepsilon_0 \le \dfrac{\pi}{2}$, у задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,\gamma)}{\partial x^2} - \gamma^2 b^2(x) u(x,\gamma) = -f(x,\gamma), \quad x \in [0;d], \\ u(0,\gamma)=0, \quad u(d,\gamma)=0. \end{cases}$$

существует решение.

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на занятиях.

К основным формам текущего контроля можно отнести устный опрос, проверку домашних заданий, тестовые задания, контрольные работы.

В ходе тестовых заданий обучающемуся выдается КИМ с тестовыми заданиями, если тестовое задание проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ тестового задания содержат три задания. На написание тестового задания отводится 15 минут. Тестовое задание оценивается в формате «зачтено» и «не зачтено». Для получения «зачтено» в тестовом задании нужно верно ответить на два задания. «Не зачтено» выставляется в том случае, если ответ обучающегося не удовлетворяет критериям ответа на «зачтено».

В ходе контрольной работы обучающемуся выдается КИМ с практическими заданиями, если контрольная проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ контрольной содержат три задания. На написание контрольной работы отводится 90 минут. Контрольная работа оценивается в формате «зачтено» и «не зачтено». Для получения «зачтено» в контрольной работе нужно верно решить два задания. «Не зачтено» выставляется в том случае, если ответ обучающегося не удовлетворяет критериям ответа на «зачтено».

20.2. Промежуточная аттестация

Перечень вопросов к экзамену

1. Преобразование Фурье.
2. Определение преобразования Лапласа. Теорема о регулярной функции.
3. Теорема о регулярности преобразования Лапласа и теорема о поведении преобразования Лапласа на бесконечности.
4. Основные свойства преобразования Лапласа.
5. Предельные теоремы преобразования Лапласа.
6. Обращение преобразования Лапласа.
7. Метод продолжения по параметру.
8. Соболевские пространства и теоремы вложения.
9. Аналитичность функций комплексного переменного.
10. Постановка первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.
11. Сведение первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на отрезке к задаче с параметром.
12. Получение априорных оценок для краевой задачи с параметром, порожденной первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности на отрезке.
13. Доказательство существования и построение оценок для решения краевой задачи с параметром, порожденной первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности на отрезке.
14. Доказательство аналитичности решения краевой задачи с параметром, порожденной первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности на отрезке по параметру γ.
15. Постановка первой начально-краевой задачи для волнового уравнения на отрезке.
16. Сведение первой начально-краевой задачи для волнового уравнения на отрезке к задаче с параметром.
17. Получение априорных оценок для краевой задачи с параметром, порожденной первой начально-краевой задачей для волнового уравнения на отрезке.

18. Доказательство существования и построение оценок для решения краевой задачи с параметром, порожденной первой начально-краевой задачей для волнового уравнения на отрезке.
19. Доказательство аналитичности решения краевой задачи с параметром, порожденной первой начально-краевой задачей для волнового уравнения на отрезке по параметру γ.
20. Постановка первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в полосе.
21. Сведение первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в полосе к задаче с параметрами.
22. Получение априорных оценок для краевой задачи с параметрами, порожденной первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности в полосе.
23. Доказательство существования и построение оценок для решения краевой задачи с параметрами, порожденной первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности в полосе.
24. Доказательство аналитичности решения краевой задачи с параметрами, порожденной первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности в полосе по параметру γ.

Промежуточная аттестация предназначена для определения уровня освоения всего объема учебной дисциплины «Эллиптические уравнения с параметром» в форме экзамена.

Промежуточная аттестация, как правило, осуществляется в конце семестра и может завершать изучение как отдельной дисциплины, так и ее разделов. Промежуточная аттестация помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях даже формирование определенных профессиональных компетенций.

На экзамене оценивается уровень освоении учебной дисциплины и степень сформированности компетенций оценками «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» и «неудовлетворительно».

В ходе экзамена обучающемуся выдается КИМ с практическими заданиями, если экзамен проводится в дистанционной форме, то КИМ размещаются в системе «Электронный университет». КИМ экзамена содержат три вопроса. На написание экзамена отводится 150 минут. «Отлично» выставляется при правильном ответе на три вопроса КИМ, «хорошо» выставляется при правильном ответе на два вопроса КИМ, «удовлетворительно» выставляется при правильном ответе на один вопрос КИМ, «неудовлетворительно» выставляется если обучающийся неверно ответил на все вопросы КИМ.

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно) Test1-5:

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Test1

Пусть задана функция $f(x)$, где $x \in \mathbb{R}^n$. Преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется следующий интеграл

а) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)dx$, б) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi x)dx$, в) $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi x)dx$.

Ответ: а).

Test2

Пусть $A(\lambda)$ – непрерывная на $[0;1]$ оператор-функции действующая из пространства X в пространство Y, а оператор $A(0)$ непрерывно обратим. Оператор $A(1)$ будет непрерывно обратимым, если существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что при всех $\lambda \in [0;1]$ и при любых $x \in X$ выполнена оценка

а) $\|A(\lambda)x\| \geq \gamma\|x\|$, б) $\|A(\lambda)x\| < \gamma\|x\|$.

Ответ: а).

Test3

Пусть

$$(f(x,\gamma), u(x,\gamma)) = \int_0^d f(x,\gamma)\bar{u}(x,\gamma)\,dx,$$

$$\|f(x,\gamma)\| = \left(\int_0^d |f(x,\gamma)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|u(x,\gamma)\| = \left(\int_0^d |u(x,\gamma)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда всегда выполнена следующая оценка:

а) $|(f(x,\gamma), u(x,\gamma))| > \|f(x,\gamma)\|\|u(x,\gamma)\|$,

б) $|(f(x,\gamma), u(x,\gamma))| \leq \|f(x,\gamma)\|\|u(x,\gamma)\|$,

в) $|(f(x,\gamma), u(x,\gamma))| \leq \|f(x,\gamma)\|^2\|u(x,\gamma)\|^2$.

Ответ: б).

Test4

Норма функции $u(x)$ в пространстве $C^k(\bar{\Omega})$ задается формулой

а) $\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x}\right|$, б) $\sum\limits_{|\alpha|\leq k}\left|\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}\right|$, в) $\sum\limits_{|\alpha|\leq k}\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\left|\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial x^\alpha}\right|$.

Ответ: в).

Test5

Является ли пространство $W_2^k(\Omega)$ гильбертовым?

а) да. б) нет.

Ответ: а).

Задания открытого типа (короткий текст): **!Task6-10**

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

!Task6 **Вставьте пропущенное слово или закончите определение**

Пусть функция $f(t)$ – оригинал, а γ – комплексное число. Функция $F(\gamma)$ заданная равенством $F(\gamma) = \int_0^\infty e^{-\gamma t} f(t)\,dt$ называется …… Лапласа функции $f(t)$.

.

.!Ответ

преобразованием

!Task7

Задача:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} - a^2(x)\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t), \quad x \in [0;d], \quad t > 0, \\ v(0,t) = 0, \quad v(d,t) = 0, \\ v(x,0) = 0, \end{cases}$$

называется начально-краевой задачей для уравнения …………

!Ответ

теплопроводности

!Task8

Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} f(x)dx$ – преобразование Фурье функции $f(x)$, тогда функцию $f(x)$ можно восстановить (при некоторых условиях) по следующей формуле $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\tilde{f}(\xi)d\xi$. Выражение $\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\tilde{f}(\xi)d\xi$ называется обратным преобразованием ….. функции $\tilde{f}(\xi)$.

.!Ответ

Фурье

!Task9

Пусть $f(t), f'(t)$ – оригиналы и $F(\gamma) = L_{t\to\gamma}[f(t)]$ – преобразование Лапласа функции $f(t)$, тогда функция $\gamma F(\gamma) - f(0)$ будет преобразованием Лапласа производной ……. порядка функции $f(t)$.

!Ответ

первого

!Task10

Пусть $F(\gamma) = \int\limits_0^\infty e^{-\gamma t} f(t)\,dt$ – преобразование Лапласа функции $f(t)$, тогда функцию $f(t)$ можно восстановить (при некоторых условиях) по следующей формуле $f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\gamma t}F(\gamma)d\gamma$. Выражение $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\gamma t}F(\gamma)d\gamma$ называется обратным преобразование ……. функции $F(\gamma)$.

!Ответ

Лапласа

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).